COLLECTION
FEUILLE D'ARGENT

TRAVAUX DE RECHERCHE
2004-001

# Évaluation des risques de la réplique d'une option asiatique en temps discret

Olivier Lussier
Jean-Pierre Paré

Québec

TRAVAUX DE RECHERCHE 2004-001

# Évaluation des risques de la réplique d'une option asiatique en temps discret

Olivier Lussier[1]
Jean-Pierre Paré[2]

*Les vues exprimées sont celles des auteurs et ne reflètent pas nécessairement les opinions du ministère des Finances et de la Banque Nationale du Canada.*

*Le document d'origine a été rédigé en français mais une version anglaise de ce document est également disponible.*

[1] Trésorerie et Marchés financiers, Banque Nationale du Canada
1155, rue Metcalfe – 1er étage, Montréal (Québec) H3B 5G2

[2] Direction de la planification financière, Ministère des Finances du Québec
12, rue Saint-Louis, Québec (Québec) G1R 5L3

Finances Québec

Édition réalisée par la
Direction des communications du ministère des Finances
12, rue Saint-Louis, RC.01
Québec (Québec) G1R 5L3

**Évaluation des risques de la réplique d'une option asiatique en temps discret**
ISBN 2-550-43582-6
Dépôt légal, novembre 2004
Bibliothèque nationale du Québec
© Gouvernement du Québec
Imprimée au Québec

2007-01262/



# RÉSUMÉ

Le modèle d'évaluation des options proposé par Black et Scholes conduit à une réplique parfaite du flux monétaire d'une option européenne. Ce modèle nécessite une révision continue du portefeuille réplique. Cette hypothèse est toutefois irréaliste dans un contexte de marché financier réel; la discrétisation des révisions du portefeuille réplique implique une reproduction imparfaite, et donc risquée, du flux monétaire de l'option. La différence de valeur à l'échéance entre l'option et le portefeuille réplique, soit l'erreur de suivi, est utilisée comme mesure de performance pour évaluer la réplique de cette option. Plusieurs études antérieures se sont attaquées à l'analyse de la réplique d'une option européenne; par contre, aucune analyse de la réplique d'une option asiatique n'avait été effectuée à notre connaissance. Une telle étude est justifiée par l'utilité et l'intérêt croissants pour ce type d'option exotique dans le marché financier, d'où l'importance de connaître les risques de la réplique de cette option.

Dans cette étude, nous analysons l'erreur de suivi de la réplique en temps discret d'une option asiatique en modifiant cinq paramètres caractérisant l'option ou la dynamique du titre sous-jacent à l'option. Ces paramètres sont : la fréquence de révision du portefeuille réplique, la volatilité conjointe du portefeuille réplique et du titre sous-jacent, la volatilité du titre sous-jacent en maintenant celle du portefeuille réplique constante, le prix d'exercice de l'option et la dérive du processus de diffusion du titre sous-jacent. Plusieurs résultats sont obtenus, notamment les effets asymétriques de l'évaluation de la volatilité future du titre sous-jacent et l'impact de la dérive du titre sous-jacent.

# TABLE DES MATIÈRES

**Résumé** ..... III

**Introduction** ..... 1

**Section 1. Rappel sur les options asiatiques.** ..... 5

**Section 2. Méthodologie.** ..... 11

**Section 3. Présentation et analyse des résultats** ..... 15

3.1 Impact d'une modification de la fréquence de révision ..... 15
3.2 Impact d'une modification conjointe de la volatilité implicite et du titre sous-jacent ..... 18
3.3 Impact d'une modification de la volatilité du titre sous-jacent ..... 21
3.4 Impact d'une modification du prix d'exercice de l'option ..... 25
3.5 Impact de l'introduction d'un paramètre de déviation de la dérive ..... 29
3.6 Synthèse des résultats ..... 33

**Conclusion** ..... 35

**Références bibliographiques** ..... 37

# INTRODUCTION

L'avancée majeure dans le domaine des options durant le XX$^{ième}$ siècle fut sans conteste le travail de Black et Scholes (1973) sur l'évaluation des options européennes. Un modèle financier, menant à un prix unique pour les options européennes, était ainsi proposé pour la première fois. La clef de voûte du travail de Black et Scholes est l'approche innovatrice utilisée pour évaluer ce type d'option. Le flux financier d'une option européenne peut être exactement reproduit par une stratégie de négociation en temps continu sur le titre sous-jacent à l'option. Cette approche mène à une équation différentielle dont la solution, connue depuis longtemps, conduit au prix de l'option. En plus de mener à un prix unique pour une option européenne, cette approche donnait une méthode précise aux arbitragistes qui désiraient faire la réplique d'une telle option, soit la couverture delta.

Plusieurs hypothèses du modèle de Black et Scholes ne sont cependant pas respectées dans le marché financier réel.

Plusieurs années avant les travaux de Black et Scholes, Mandelbrot (1963a, b; 1967) avait souligné l'intérêt d'étudier les propriétés des séries chronologiques des mouvements du prix des titres sous-jacents. Ses résultats confirmaient les hypothèses de distributions inconditionnelles à queues épaisses du prix et de changement de variance dans le temps. De plus, Mandelbrot remarquait que les chocs sont suivis très souvent par des chocs dans la même direction. L'hypothèse d'une volatilité constante retenue dans le modèle de Black et Scholes ne concordait donc pas avec l'analyse des données du marché financier. De nouvelles hypothèses et de nouveaux modèles étaient donc nécessaires.

Quelques mois après la publication du travail de Black et Scholes, Merton (1973) prolongea ce modèle pour le cas d'une volatilité déterministe non constante. Il démontra qu'une couverture parfaite était possible si la volatilité moyenne était utilisée comme volatilité du titre sous-jacent dans l'équation de Black et Scholes. Galai (1983) analysa les rendements de couvertures par le delta d'options sur des actions individuelles transigées sur le Chicago Board Option Exchange (CBOE). Il démontra que le modèle de Black et Scholes, avec une volatilité constante, ne reproduisait pas les rendements observés moyens des options. Les conclusions de son étude suggèrent que des éléments affectant les mouvements du prix des options ne figurent pas dans l'évaluation de Black et Scholes. Notamment, l'idée de volatilité stochastique est discutée par Galai (1983).

Plusieurs modèles dynamiques ont aussi été proposés pour tenir compte de la volatilité non constante et du phénomène de queues épaisses, tels les modèles à volatilité stochastique (Cox et Ross, 1976), les modèles à sauts (Cox et Ross, 1975; Merton 1976) et les modèles de type ARCH (Engel 1982). Ces hypothèses sur la dynamique du titre sous-jacent amenèrent le développement d'une importante littérature sur l'évaluation et la réplique des options dans ces nouveaux cadres dynamiques.

L'hypothèse de négociation en temps continu du modèle de Black et Scholes est manifestement irréalisable dans le contexte du marché financier réel. Plusieurs auteurs se sont donc spécifiquement intéressés à l'impact de la discrétisation de la négociation du titre sous-jacent. Dans le cadre des options européennes, Boyle et Emmanuel (1980) ont démontré que, lorsque le portefeuille réplique est révisé de façon discrète, les mouvements de l'option ne sont plus totalement corrélés avec ceux du titre sous-jacent; la couverture n'est donc plus parfaite. Dans ce cas, la différence de prix entre le portefeuille réplique et l'option suite à une variation du prix du titre sous-jacent est convexe. La réplique d'une option par un arbitragiste devient donc une opération risquée; l'arbitragiste qui réplique une option suite à une vente de celle-ci est donc rémunéré par le marché pour le risque qu'il assume. Ceci explique qualitativement en partie pourquoi les volatilités implicites des options négociées sont supérieures en moyenne aux volatilités réalisées par les titres sous-jacents.

Boyle et Emmanuel (1980) ont étudié les propriétés statistiques du rendement de la couverture par réplique d'option lorsque les révisions du portefeuille sont effectuées en temps discret. Avec les hypothèses du modèle de Black et Scholes, ils montrent que la distribution locale de ce rendement, pendant une courte période de transactions, est asymétrique dans le cas d'une option d'achat européenne simple. De même, ces auteurs montrent par des analyses des rendements moyens des portefeuilles couverts que cette asymétrie mène à un biais des statistiques-t.

Engle et Rosenberg (1994, 1995) se penchent sur la problématique de couverture d'option avec révisions en temps discret dans le cas d'une dynamique avec volatilité stochastique. Ils s'intéressent, notamment, aux valeurs estimées du gamma de l'option. Ces auteurs soutiennent qu'une couverture d'option peut être optimisée en utilisant un instrument corrélé aux variations de la volatilité. Par exemple, pour couvrir une option sujette à un paramètre de volatilité stochastique, une autre option corrélée aux changements aléatoires de volatilité devrait être utilisée en plus du titre sous-jacent de l'option à couvrir. Suivant ce processus, les auteurs montrent que les valeurs delta dérivées à partir du processus GARCH sont équivalentes aux valeurs delta dérivées du modèle de Black et Scholes. Par contre, les valeurs gamma diffèrent significativement des valeurs estimées par le modèle de Black et Scholes selon les caractéristiques de l'option. Les auteurs suggèrent donc qu'il est possible d'améliorer les performances de couverture en utilisant des paramètres représentant mieux les mouvements des instruments financiers utilisés.

Bertsimas, Kogan et Lo (2000) introduisent la notion de granularité temporelle qui caractérise la rapidité de convergence vers le modèle en temps continu dans le cas d'une négociation discrète du titre sous-jacent. La rapidité de convergence varie selon le flux monétaire et la structure de l'option utilisée pour la couverture; une valeur du gamma de l'option plus élevée ou un processus de diffusion du titre sous-jacent plus complexe demanderont un plus grand nombre de périodes de révision pour atteindre le même niveau de qualité de couverture, si celle-ci est effectuée sur un horizon donné. L'analyse de la

vitesse de convergence du modèle discret vers le modèle continu permet d'étudier la distribution de l'erreur de suivi de la couverture. Elle permet aussi de quantifier la qualité d'une approximation continue sur les situations réelles. Bertsimas, Kogan et Lo (2000) généralisent l'étude de la discrétisation en étudiant le comportement asymptotique de l'erreur de suivi pour une vaste gamme de processus de diffusion et de flux monétaires d'option. Ainsi, ils démontrent que l'erreur absolue de suivi moyenne est de l'ordre de $N^{-1/2}$, où *N* représente le nombre de révisions pendant la couverture. Les auteurs utilisent les résultats locaux de Boyle et Emmanuel (1980) et considèrent la durée de vie totale de l'option. La distribution de l'erreur de suivi, qui est localement asymétrique, devient asymptotiquement symétrique.

Gobet et Temam (2001) étudient eux aussi la convergence de l'erreur de suivi avec l'augmentation du nombre de révisions durant la période de couverture. Ils démontrent que ce taux de convergence dépend très fortement des propriétés de régularité de la fonction du flux monétaire de l'option. Ce taux de convergence diminue avec l'augmentation de l'irrégularité du flux monétaire de l'option.

La discrétisation de la négociation sur le titre sous-jacent ouvre la porte à l'analyse de l'impact des frais de transaction sur la réplique d'une option. En contexte de révisions discrètes, il existe un compromis entre la qualité de la réplique et les frais de transaction impliqués. Ainsi, plus le nombre de révisions sera élevé, moins l'incertitude sur l'erreur de la réplique sera élevée, mais les frais de transaction impliqués seront plus importants. Il s'agit donc de déterminer un niveau de coût pour lequel le risque de la couverture est suffisamment contrôlé.

Tel que démontré par Leland (1985), les relations d'arbitrage dérivées du modèle de Black et Scholes ne tiennent plus en présence de frais de transaction. De façon générale, l'inclusion des frais de transaction crée des bornes autour du prix théorique de l'option à l'intérieur desquelles les profits d'arbitrage sont impossibles. Leland (1985) a toutefois affirmé qu'une réplique parfaite était possible même en présence de frais de transaction; celle-ci est réalisable si, à la limite, lorsque le temps entre les révisions tend vers zéro, une volatilité de couverture ajustée aux frais de transaction est utilisée pour la construction du portefeuille réplique. Le terme de volatilité ajusté tend cependant vers l'infini lorsque l'intervalle de révision tend vers zéro. Par ailleurs, Kabanov et Safarian (1997) ont évalué l'erreur de couverture de la stratégie de Leland (1985) pour la valorisation d'option d'achat européenne en présence de frais de transaction. Ils ont démontré que l'erreur de couverture dérivée par Leland (1985) n'était pas, à la limite, égale à zéro quand le niveau des frais de transaction est constant. Kabanov et Safarian (1997) soutiennent que les conclusions de Leland (1985) étaient basées sur des hypothèses qui n'avaient pas reçu de confirmations.

Dans notre étude, nous analysons la réplique d'une option asiatique d'achat sur devise en temps discret en présence de frais de transaction. À notre connaissance, une telle étude n'a pas été effectuée antérieurement. La dynamique du titre sous-jacent est fondamentalement celle du modèle de Garman-Kohlhagen (1983), qui n'est qu'une simple adaptation pour le marché des devises du modèle de Black et Scholes.

L'intérêt des options asiatiques vient du fait que le flux financier d'une telle option est relié à la valeur moyenne d'un actif financier pour un horizon donné. En guise d'exemple, prenons le cas d'une entreprise achetant régulièrement une marchandise dont le prix fluctue sur le marché. Une option d'achat asiatique fait en sorte que l'entreprise sera protégée contre une augmentation du prix moyen de cette marchandise pour l'horizon donné.

Ces produits dérivés « exotiques » ne sont pas négociés sur des places boursières organisées; ils sont transigés de gré à gré. De plus, le marché des options asiatiques est restreint. Dans cette perspective, il est donc intéressant d'envisager la réplique d'une telle option au lieu de l'acheter. L'analyse de la réplique d'une option asiatique est donc indispensable à une prise de décision quant à sa réplique ou à son achat.

À la section 1, nous présentons un court rappel sur les options asiatiques, notamment sur les méthodes d'évaluation des options asiatiques arithmétiques. La section 2 présente la méthodologie utilisée pour l'analyse de la réplique d'une option asiatique arithmétique. Nous nous intéressons à l'impact de la modification de cinq paramètres sur le processus de réplique de l'option. Ces paramètres sont : la fréquence de révision du portefeuille réplique, la volatilité conjointe du portefeuille réplique et du titre sous-jacent, la volatilité du titre sous-jacent en maintenant celle du portefeuille réplique constante, le prix d'exercice de l'option et la dérive du processus de diffusion du titre sous-jacent. Finalement, nous retrouvons à la section 3 les résultats obtenus ainsi que l'analyse de ceux-ci.

# SECTION 1

## Rappel sur les options asiatiques

Les options asiatiques se situent dans la catégorie des options dites « exotiques ». Après la publication des travaux de Black et Scholes (1973), une augmentation fulgurante du nombre d'options européennes et américaines transigées a été observée sur les marchés financiers. Ces options ne comblent cependant pas à elles seules tous les besoins des intervenants du marché financier. C'est pour cette raison que les options exotiques ont été créées. Elles élargissent les possibilités des options ordinaires afin de combler certains besoins spécifiques des intervenants du marché financier. Leur structure permet de créer des distributions de flux monétaire variées qui diffèrent des distributions conventionnelles. Elles comportent des caractéristiques qui les rendent, par contre, difficiles à évaluer. En effet, il n'existe souvent pas de solutions analytiques d'évaluation.

Une option possède des propriétés et un flux monétaire qui lui sont propres. Il est possible de les regrouper en familles présentant des caractéristiques similaires. Il existe sept aspects généraux qui différencient les options :

- la fonction qui définit le prix d'exercice de l'option;
- la fonction qui définit le flux monétaire de l'option à l'échéance;
- la fonction du prix du titre sous-jacent;
- les bornes de prix d'exercice de l'option;
- la fonction qui définit l'échantillonnage du prix du titre sous-jacent;
- la fonction qui limite la valeur de l'option;
- les dates d'exercice de l'option.

L'option asiatique, ou option sur moyenne du prix du titre sous-jacent, fait partie de la famille des options dépendantes du sentier emprunté par le titre sous-jacent au cours de sa durée de vie. Elle est l'une des options exotiques les plus utilisées et elle est transigée sur le marché de gré à gré. Son habileté à suivre le cours moyen du titre sous-jacent est le principal atout qui la distingue des options ordinaires. En comparaison avec celles-ci, sa valeur marchande est moins volatile durant sa vie et elle est moins sujette à des variations brutales au moment du règlement.

Le flux financier d'une option asiatique est défini en fonction d'une moyenne du prix du titre sous-jacent pour un horizon donné. Cette caractéristique de l'option asiatique contribue à contrôler le prix moyen d'acquisition ou de vente d'une marchandise ou d'un actif financier durant une période donnée.

Trois cas de moyenne sont généralement considérés pour les options asiatiques.

- Moyenne arithmétique :

$$A(t_N) \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i)$$

$S(t_i)$ représente le prix du titre sous-jacent au moment où l'observation est effectuée au temps $t_i$, où $i$ va de 1 à *N*. Ce type de moyenne est flexible; la fréquence des $t_i$ peut être irrégulière, quotidienne, hebdomadaire, mensuelle... Ce type de moyenne peut s'avérer intéressant dans le cas où une marchandise ou un actif financier est transigé d'une façon régulière pendant l'horizon, ou que, sur le plan budgétaire, certaines dates particulières sont considérées.

- Moyenne arithmétique pondérée :

$AP(t_N) \equiv \sum_{i=1}^{N} \omega_i S(t_i)$, où la somme des $\omega_i$ est égale à un.

Dans le calcul de la moyenne arithmétique, l'importance de chacune des observations est uniforme. Cependant, il est possible de modifier le poids de chaque observation. Ainsi, la moyenne arithmétique est remplacée par une moyenne pondérée arithmétique. Ce type de moyenne peut s'avérer particulièrement utile dans le cas où la quantité de marchandise ou d'actif financier transigée par l'entreprise varie dans le temps.

- Moyenne géométrique :

$$G(t_N) \equiv \left\{\prod_{i=1}^{N} S(t_i)\right\}^{1/N}.$$

Ce type de moyenne s'avère cependant plus intéressant dans un cadre académique que pour le marché financier. Notons qu'il est aussi possible de généraliser la moyenne géométrique sous forme de moyenne géométrique pondérée.

Tout comme les options ordinaires, l'option asiatique peut être américaine ou européenne. Rappelons qu'une option américaine permet l'exercice de celle-ci à tout moment durant sa durée de vie. L'option de type européen, par contre, limite le moment de l'exercice de l'option à l'échéance. L'option asiatique peut être une option d'achat ou une option de vente. Nous présentons les caractéristiques fondamentales qui distinguent les options asiatiques en prenant comme exemple le cas d'une option asiatique d'achat de type européen avec moyenne arithmétique.

Option asiatique à taux moyen. Option dont le flux monétaire final est donné par l'équation,

$$Max\left[A(t_N) - K, 0\right],$$

où $K$ représente le prix d'exercice de l'option.

Option à prix d'exercice moyen. Option dont le prix d'exercice *K* de l'option européenne ordinaire est remplacé par la moyenne du prix du titre sous-jacent au cours de la durée de vie de l'option. Le flux monétaire final de ce type d'option est donné par l'équation :

$$Max\left[S(t_N) - A(t_N), 0\right],$$

où $S(t_N)$ représente le prix du titre sous-jacent à l'échéance $t_N$.

Option à taux moyen inverse. Option asiatique où le taux moyen est remplacé par son inverse. Ce type d'option est particulièrement utilisé lors de transaction dans le marché des devises. Le flux monétaire final de ce type d'option est donné par :

$$Max\left[A(t_N)^{-1} - K, 0\right],$$

où $A(t_N)^{-1}$ et $K$ sont exprimés dans la même devise. Dans certains cas, on remplace $A(t_N)^{-1}$ par :

$$\widetilde{A}(t_N)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{S(t_i)}}.$$

L'évaluation d'une option asiatique s'avère assez difficile dans certains cas. Nous nous attardons ici au cas d'une option d'achat asiatique européenne de moyenne arithmétique sur devise. Le modèle de diffusion de l'actif titre sous-jacent est le mouvement brownien géométrique qu'on retrouve dans le modèle de Garman-Kohlhagen (1983), qui n'est qu'une simple adaptation pour le marché des devises du modèle de Black et Scholes. Dans ce modèle, la valeur de cette option est donnée par l'équation :

$$C = e^{-r(T-t)} E^*\left[ Max\left( \frac{1}{N}\left( \sum_{i=1}^{N} S(t_i) \right) - K, 0 \right) \right], \qquad (1)$$

où $E^*[]$ : espérance mathématique sous la probabilité de risque neutre.

$dS = (r - r_f)Sdt + \sigma S\sqrt{dt}\,\varepsilon$ (Diffusion stochastique de probabilité risque neutre).

$S(t_i) = S(t_{i-1}) e^{(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)*(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}\,\varepsilon_i}$

$S(t_i)$ : taux de change $CA/$US à $t_i$.

$\varepsilon_t \sim iidN(0,1)$.

$K$ : prix d'exercice de l'option.

$r_f$ : taux d'intérêt sans risque dans la devise étrangère ($US).

$r$ : taux d'intérêt sans risque dans la devise domestique.

$T$ : échéance de l'option.

$t$ : moment où se fait l'évaluation.

$t_i$ : moment d'enregistrement de la lecture $i$ de la moyenne.

$\sigma$ : volatilité du titre sous-jacent.

Cette équation ne possède cependant pas d'expression analytique. Des méthodes indirectes sont donc nécessaires pour obtenir le prix de l'option. La méthode de simulation Monte Carlo est une procédure numérique largement utilisée pour évaluer ce type d'équation. Elle consiste en la simulation du processus de diffusion du titre sous-jacent sous la probabilité risque neutre. La répétition de ce procédé procure une approximation de la distribution de la valeur de l'option. L'espérance sous la probabilité risque neutre peut donc être calculée. Le principal désavantage de cette méthode est le temps d'évaluation nécessaire à l'obtention d'une bonne précision. Ceci fait en sorte que cette procédure ne peut être utilisée d'une façon efficace dans la problématique d'analyse de la réplique d'une option asiatique.

Il existe cependant dans la littérature financière des solutions approchées à cette équation. Vorst (1992) a proposé une approximation de la valeur de l'option à taux moyen arithmétique par la solution analytique d'une option asiatique de moyenne géométrique. Cependant, la valeur d'une moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la valeur d'une moyenne arithmétique, ce qui introduit un biais à l'estimation. Le prix donné par l'approximation de Vorst est donc une borne inférieure de la valeur de l'option. Pour corriger ce biais, Vorst propose de modifier le prix d'exercice comme suit :

$$K' = K - \left[ E^*\left( \frac{1}{N} \sum_{i=m+1}^{N} S(t_i) \right) - E^*\left( \prod_{i=m+1}^{N} S(t_i)^{1/N} \right) \right].$$

L'écart entre les deux processus est donc considéré. De même, les valeurs explicites de ces espérances sont données par :

$$E^*\left(\frac{1}{N}\sum_{i=m+1}^{N} S(t_i)\right) = S(t)\sum_{i=m+1}^{N} e^{(r-r_f)(t_i-t)}/N\,,$$

$$E^*\left(\prod_{i=m+1}^{N} S(t_i)^{1/N}\right) = e^{u_G+\sigma_G^2/2}\,,$$

avec $m$ points de moyenne déjà enregistrés.

Levy (1992) propose d'estimer le processus de diffusion de l'option asiatique à taux moyen arithmétique par une loi normale. Il fait l'hypothèse que $\ln(A(t_N)) \sim N(\alpha, \nu^2)$ et il utilise la fonction génératrice des moments de $\ln(A(t_N))$. De plus, $E^*[A(t_N)] = e^{\alpha+\nu^2/2}$ et $E^*[A(t_N)^2] = e^{2\alpha+2\nu^2}$ possèdent des solutions connues. Ainsi, en résolvant le système d'équations, les paramètres $\alpha$ et $\nu$ sont identifiés :

$$\alpha = 2\ln E(A(t_N)) - \tfrac{1}{2}\ln E(A(t_N)^2)\,,$$
$$\nu^2 = \ln E(A(t_N)^2) - 2\ln E(A(t_N))\,.$$

Le résultat de l'approximation de Levy est déterminé par la solution analytique de l'option asiatique à taux moyen géométrique en substituant $u_G$ par $\alpha$ et $\sigma_G^2$ par $\nu^2$.

Levy estime la distribution de $A(t_N)$ par une loi lognormale ayant comme caractéristique une moyenne et une variance correspondant à la distribution à estimer. Cependant, une certaine incertitude demeure en ce qui a trait aux moments supérieurs. Pour des niveaux de volatilité élevés (supérieurs à 20 %), l'importance de ces moments devient significative et peut mener à un biais important entre le prix réel de l'option et le prix donné par ce modèle.

Turnbull et Wakeman (1991) utilisent le développement en séries de cette fonction dans le but de procéder aux ajustements nécessaires compte tenu des moments d'ordre supérieur. Supposons $f^*(\omega)$ la fonction de densité conditionnelle de $A(t_N)$ ($P[A(t_N) = \omega]$), en posant $a(\omega)$ comme une distribution approximative, $f^*(\omega)$ peut être développée comme suit (Jarrow et Rudd (1992)) :

$$f^*(\omega) = a(\omega) - E_1 a^{(1)}(\omega) + \tfrac{1}{2!}E_2 a^{(2)}(\omega) - \tfrac{1}{3!}E_3 a^{(3)}(\omega) + \tfrac{1}{4!}E_4 a^{(4)}(\omega) - \ldots$$

où $a^{(i)}(\omega)$ représente la dérivée d'ordre $i$ de $a(\omega)$,

$E_i$ représente les différences entre les cumulants des distributions estimée et exacte.

De façon explicite, pour une variable aléatoire X, les quatre premiers cumulants sont exprimés de cette façon :

$$\chi_1 = E(X),\ \chi_2 = E(X - E(X))^2,$$
$$\chi_3 = E(X - E(X))^3 \text{ et } \chi_4 = E(X - E(X))^4 - 3\chi_2.$$

De plus, en dénotant $\chi_{if}$ et $\chi_{ia}$ les cumulants d'ordre *n* associés aux distributions estimée et exacte, $\chi_{i\varepsilon}$ représente la différence entre ces deux valeurs. Ainsi, les valeurs des coefficients $E_i$ sont :

$$E_1 = \chi_{1\varepsilon}.$$
$$E_2 = \chi_{1\varepsilon}^2 + \chi_{2\varepsilon}.$$
$$E_3 = \chi_{1\varepsilon}^3 + 3\chi_{1\varepsilon}\chi_{2\varepsilon} + \chi_{3\varepsilon}.$$
$$E_4 = \chi_{1\varepsilon}^4 + 3\chi_{2\varepsilon}^2 + 4\chi_{1\varepsilon}\chi_{3\varepsilon} + 6\chi_{1\varepsilon}^2\chi_{2\varepsilon} + \chi_{4\varepsilon}.$$

Étant donné que les deux premiers moments de l'approximation de Levy correspondent aux deux premiers moments de la distribution exacte, les termes $E_1$ et $E_2$ sont nuls. Ainsi, l'approximation du prix de l'option asiatique est donnée par l'expression :

$$e^{-rT} E^* Max[A(t_N) - K, 0] =$$
$$e^{\alpha + \frac{1}{2}v^2 - rT} N(d_1) - e^{-rT} KN(d_1 - v) - e^{-rT}\left[\tfrac{1}{3!}E_3 a^{(1)}(K) - \tfrac{1}{4!}E_4 a^{(2)}(K)\right].$$

# SECTION 2

## Méthodologie

Dans cette section, nous présentons la méthodologie utilisée pour l'analyse de la réplique d'une option asiatique de moyenne arithmétique sur devise ($CA/$US). Le modèle de diffusion du titre sous-jacent est celui présenté à l'équation 1. Les paramètres de référence utilisés pour l'option et la dynamique du titre sous-jacent sont les suivants :

**Tableau 1**

**Paramètres de référence utilisés pour la simulation de la réplique de l'option**

| | |
|---|---|
| **Prix de départ du titre sous-jacent ($CA)** | 1,60 |
| **Prix d'exercice de l'option ($CA)** | 1,60 |
| **Échéance de l'option (année)** | 1 |
| **Taux d'intérêt en $CA un jour** | 2,75 % / an |
| **Taux d'intérêt en $CA un an** | 3,35 % / an |
| **Taux d'intérêt en $US un jour** | 1,75 % / an |
| **Taux d'intérêt en $US un an** | 2,00 % / an |
| **Volatilité du titre sous-jacent** | 6,25 % / an |
| **Volatilité utilisée pour évaluer le delta du portefeuille réplique** | 6,25 % / an |
| **Déviation de la dérive du titre sous-jacent** | 0,00 % / an |
| **Fréquence de révision du portefeuille réplique** | 1 fois / jour |

Ces paramètres de base ont été déterminés dans le but de reproduire des données réalistes et fidèles à la situation du marché financier pour l'année 2002. Les frais de transaction ont été fixés à 0,05 % de la valeur transigée; ceux-ci incluent les frais initiaux d'achat du portefeuille réplique. Lorsqu'un taux d'intérêt entre un jour et un an est nécessaire, il est obtenu par l'interpolation linéaire entre les taux un jour et un an du tableau précédent.

La simulation de la réplique de l'option est faite avec la méthode Monte Carlo en appliquant la méthode de la couverture delta. Dupire (1998) constitue un excellent livre sur l'application des méthodes Monte Carlo à la finance. Au premier jour de négociation, le portefeuille réplique possède comme valeur nette la valeur de l'option ce jour-là. Ce portefeuille est composé d'une position longue en titre sous-jacent donné par le delta de l'option et d'une position courte en actif sans risque. Les rebalancements suivants sont effectués de façon à ce que le delta du portefeuille réplique et celui de l'option coïncident.

Afin de rendre la simulation le plus près possible de la réalité, seules les répliques des jours ouvrables de 2002 étaient possibles dans la simulation. Six fréquences de réplique de l'option ont été étudiées, soit deux fois par jour, une fois par jour, tous les deux jours, tous les trois jours, une fois par semaine et à toutes les deux semaines. Dans le cas de la révision deux fois par jour, on suppose que les révisions ont lieu à 10 h et à 14 h.

Nous avons analysé la réplique de l'option en utilisant une simulation Monte Carlo programmée en *Visual Basic*. La fonction de congruence utilisée est donnée par l'expression :

$$X_{n+1} = (X_n * a + c) Mod(2^{24})$$

où $a$ = 214013 et $c$ = 2531011.

L'option d'achat asiatique est émise le 31 décembre 2001, son échéance étant le 31 décembre 2002. La valeur notionnelle de l'option est de 1 $US. La moyenne du titre sous-jacent est arithmétique mensuelle. Les observations sont enregistrées le dernier jour ouvrable de chaque mois. Il y a donc 12 observations utilisées pour le calcul de la moyenne au total dans l'année. Cette moyenne est évaluée selon l'expression suivante :

$$\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} S(t_j),$$

où $S(t_j)$ représente la valeur du titre sous-jacent au temps $t_j$;

$t_j$ représente le temps de la jième observation utilisée pour le calcul de la moyenne.

Plusieurs méthodes d'estimation des options asiatiques ont été présentées à la section 1. L'approximation de Vorst (1992) a été retenue pour évaluer la valeur de l'option durant sa durée de vie. Cette fonction constitue la méthode d'évaluation la plus efficace compte tenu du niveau de souplesse nécessaire pour l'intégration d'un calendrier réel. Vorst (1992) propose en plus une solution analytique pour l'approximation du delta de l'option. Cependant, une autre méthode d'estimation du delta a été intégrée au programme par souci de vérification et de fiabilité. Celle-ci repose sur une estimation de la valeur d'une dérivée par différences numériques. De plus, une estimation de l'ordre de grandeur de l'erreur d'estimation a été développée pour valider les résultats. Notons que c'est cette dernière fonction qui est utilisée lors des simulations.

Nous avons procédé à l'analyse de cinq paramètres caractérisant la réplique de l'option. Ces paramètres sont : la fréquence de révision du portefeuille réplique, la volatilité conjointe du portefeuille réplique et du titre sous-jacent, la volatilité du titre sous-jacent en maintenant celle du portefeuille réplique constante, le prix d'exercice de l'option et la dérive du processus de diffusion du titre sous-jacent. La méthode du Jacknife a été utilisée pour déterminer l'incertitude sur une valeur estimée présentée dans les tableaux de données. On retrouve une excellente présentation de cette méthode dans Robinson et Yang (1986).

# SECTION 3

## Présentation et analyse des résultats

Dans cette section, nous analysons les impacts de la modification de cinq paramètres caractérisant l'option considérée ou la dynamique du titre sous-jacent sur la réplique de cette option. Afin d'obtenir une meilleure interprétation des résultats, nous avons séparé la composante des frais de transaction dans nos tableaux de résultats.

### *3.1 Impact d'une modification de la fréquence de révision*

Le premier paramètre étudié est la fréquence de révision du portefeuille réplique. Les simulations sont effectuées pour six fréquences différentes, soit : deux fois par jour ouvrable, une fois par jour ouvrable, une révision à tous les deux jours ouvrables, une révision à tous les trois jours ouvrables, une révision une fois par semaine et finalement une révision aux deux semaines. Les résultats obtenus par simulation Monte Carlo sont présentés au tableau 2.

**Tableau 2**

**Impact de la modification du nombre total de révisions du portefeuille réplique**

| Fréquence de révision | 2 fois / jour ouv. | 1 fois / jour ouv. | Aux 2 jrs ouv. | Aux 3 jrs ouv. | 1 fois / sem. | 1 fois / 2 sem. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de simulations Monte Carlo | 30 000 | 60 000 | 120 000 | 190 000 | 280 000 | 400 000 |
| Nombre total de révisions du portefeuille réplique | 492 | 246 | 123 | 82 | 52 | 26 |
| Espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000130 | 0,000145 | 0,000138 | 0,000122 | 0,000139 | 0,000135 |
| Incertitude sur l'espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000010 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000009 | 0,000010 |
| Écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,001790 | 0,001866 | 0,002920 | 0,003604 | 0,004901 | 0,006149 |
| Incertitude sur l'écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000009 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000007 | 0,000007 | 0,000007 |
| Espérance des frais de transaction ($CA) | 0,003672 | 0,003126 | 0,002541 | 0,002261 | 0,002008 | 0,001613 |
| Incertitude sur l'espérance des frais de transaction ($CA) | 0,000011 | 0,000003 | 0,000002 | 0,000001 | 0,000001 | 0,000001 |

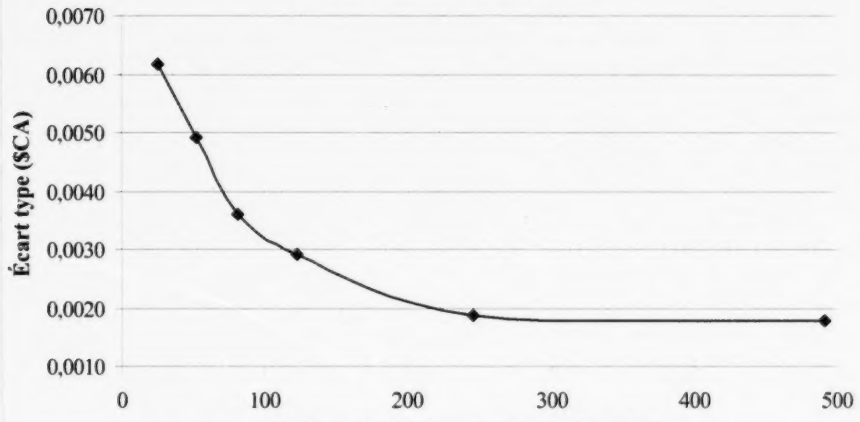
Les frais de transaction lors de l'achat initial du portefeuille réplique sont de 0,000441 $CA. La valeur de l'espérance de l'erreur de suivi demeure stable en regard du nombre de révisions effectuées, compte tenu de l'incertitude sur cette valeur. Dans tous les cas, cette valeur est strictement positive en tenant compte de l'incertitude. Un arbitragiste qui réplique une option asiatique qu'il a vendue peut donc s'attendre à un profit. Ce profit ne sera cependant pas significatif compte tenu de l'écart type sur celui-ci. Le risque produit par la discrétisation de la négociation sur le titre sous-jacent a donc un coût. En effet, l'écart type de cette erreur de suivi augmente significativement à mesure que le nombre de révisions de portefeuille diminue, passant de 0,001790 $CA pour

une révision deux fois par jour à 0,006149 $CA pour une révision aux deux semaines. Ces données sont illustrées au graphique 1. Plus le temps entre les révisions augmente, plus l'écart entre le portefeuille réplique et la valeur de l'option risque d'augmenter. Bien que l'espérance de l'erreur de suivi ne soit pas affectée par des révisions moins fréquentes, le risque qui y est associé est nettement plus élevé.

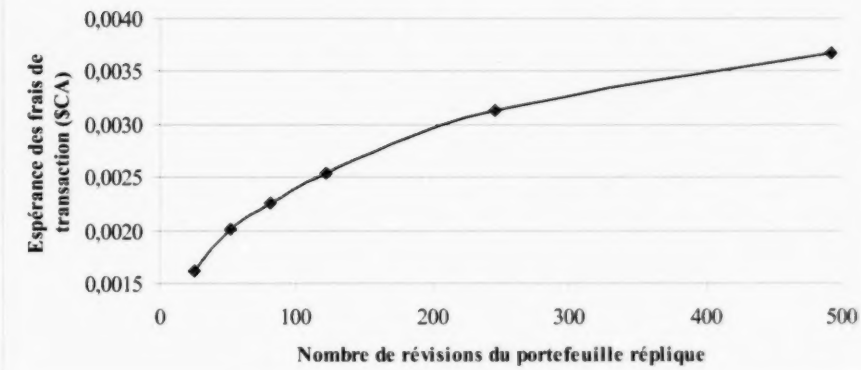
Les frais de transaction engendrés par les révisions de portefeuille diminuent significativement avec la diminution de la fréquence de révision, tel qu'illustré au graphique 2. En effet, une diminution de la fréquence de révision du portefeuille réplique engendre un nombre inférieur de transactions et, par le fait même, une diminution des frais qui y sont associés.

Le choix de la fréquence de la réplique de l'option repose donc sur un arbitrage entre les frais de transaction et le risque de l'erreur de suivi. Le choix d'une fréquence de révision doit s'effectuer selon le risque que l'investisseur est prêt à supporter et les sommes supplémentaires qu'il est prêt à investir pour diminuer ce risque. Le graphique 3 illustre l'arbitrage entre l'espérance des frais de transaction et l'écart type de l'erreur de suivi que devra faire l'arbitragiste désirant répliquer l'option.

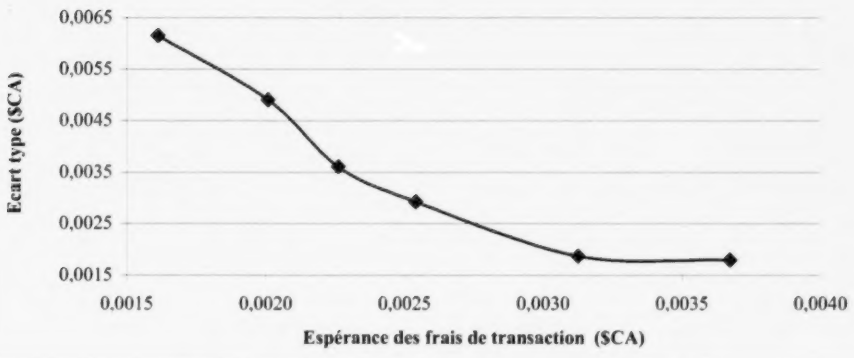
**Graphique 1**
**Écart type de l'erreur de suivi en fonction du nombre de révisions**




**Graphique 2**
**Espérance des frais de transaction en fonction du nombre de révisions**



**Graphique 3**
**Écart type de l'erreur de suivi en fonction de l'espérance des frais de transaction**




## *3.2 Impact d'une modification conjointe de la volatilité implicite et du titre sous-jacent*

Dans cette section, l'impact d'une variation de la volatilité implicite et du titre sous-jacent sur le portefeuille réplique de l'option est étudié. Pour des raisons d'analyse, nous distinguons entre la volatilité du titre sous-jacent utilisée pour la simulation Monte Carlo (le processus de diffusion du titre sous-jacent) et la volatilité utilisée pour rebalancer le portefeuille réplique. Cette différenciation a été apportée dans le but de vérifier l'impact d'une surestimation et d'une sous-estimation de la volatilité utilisée pour la réplique de l'option; ces résultats sont présentés à la section 3.3.

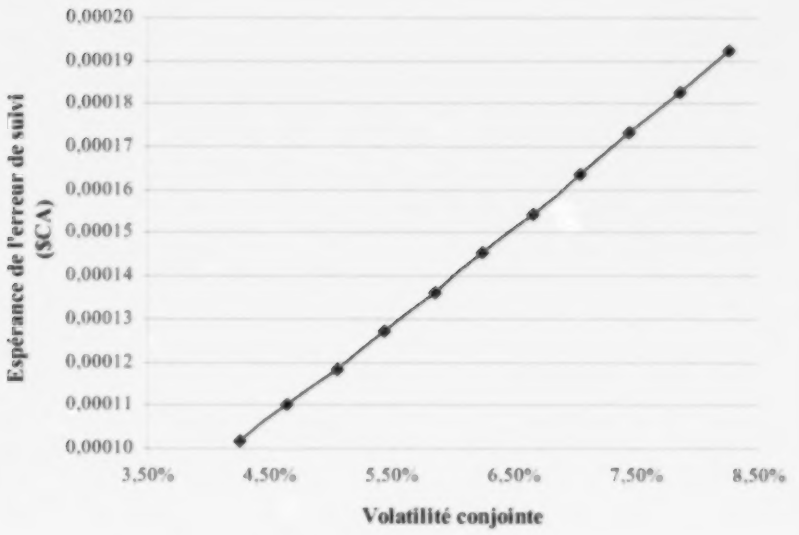
Le tableau 3 présente les résultats des simulations pour une modification de la volatilité conjointe de 4,25 % à 8,25 %.

## Tableau 3

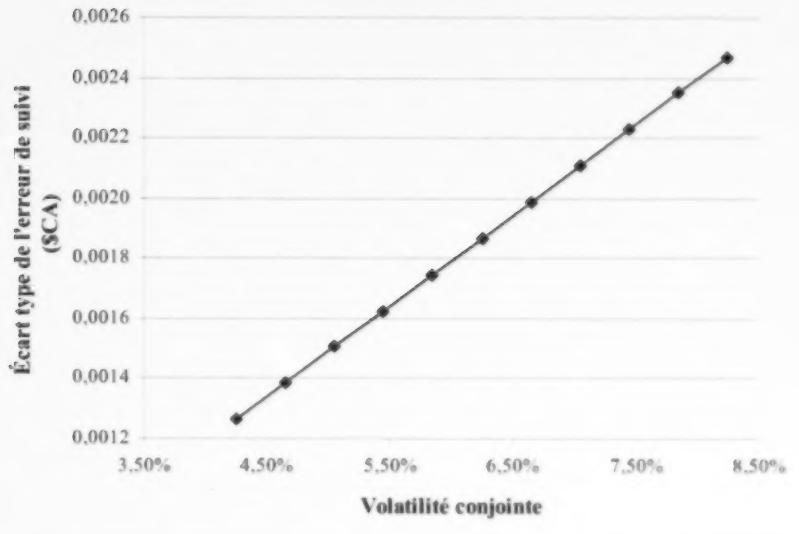
### Impact de la modification de la volatilité conjointe du titre sous-jacent et du portefeuille réplique sur la réplique de l'option

| Volatilité conjointe | 4,25 % | 4,65 % | 5,05 % | 5,45 % | 5,85 % | 6,25 % | 6,65 % | 7,05 % | 7,45 % | 7,85 % | 8,25 % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur initiale de l'option ($CA) | 0,020602 | 0,022085 | 0,023572 | 0,025062 | 0,026556 | 0,028051 | 0,029548 | 0,031047 | 0,032546 | 0,034047 | 0,035548 |
| Delta initial de l'option | 0,574424 | 0,568072 | 0,562784 | 0,558329 | 0,554539 | 0,551289 | 0,548483 | 0,546045 | 0,543917 | 0,542053 | 0,540413 |
| Espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000102 | 0,000110 | 0,000118 | 0,000127 | 0,000136 | 0,000145 | 0,000154 | 0,000164 | 0,000173 | 0,000183 | 0,000192 |
| Incertitude de l'espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000005 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000007 | 0,000007 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000009 | 0,000009 | 0,000010 | 0,000010 |
| Écart type erreur de suivi ($CA) | 0,001263 | 0,001384 | 0,001504 | 0,001625 | 0,001745 | 0,001866 | 0,001987 | 0,002108 | 0,002228 | 0,002349 | 0,002469 |
| Incertitude de l'écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000004 | 0,000005 | 0,000005 | 0,000005 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000007 | 0,000007 | 0,000007 | 0,000008 | 0,000008 |
| Espérance des frais de transaction ($CA) | 0,003137 | 0,003135 | 0,003133 | 0,003130 | 0,003128 | 0,003126 | 0,003124 | 0,003122 | 0,003121 | 0,003119 | 0,003118 |
| Frais de transaction initiaux ( $CA) | 0,000460 | 0,000454 | 0,000450 | 0,000447 | 0,000444 | 0,000441 | 0,000439 | 0,000437 | 0,000435 | 0,000434 | 0,000432 |
| Espérance des frais de transaction de révision ($CA) | 0,002677 | 0,002681 | 0,002683 | 0,002683 | 0,002684 | 0,002685 | 0,002685 | 0,002685 | 0,002686 | 0,002685 | 0,002686 |
| Incertitude sur l'espérance des frais de transaction ($CA) | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 |

**Graphique 4**
**Espérance de l'erreur de suivi en fonction de la volatilité conjointe**




**Graphique 5**
**Écart type de l'erreur de suivi en fonction de la volatilité conjointe**



Le graphique 4 illustre le comportement de l'espérance de l'erreur de suivi en fonction de la volatilité. Cette erreur de suivi augmente linéairement en passant de 0,000102 $CA pour une volatilité de 4,25 % à 0,00192 $CA pour une volatilité de 8,25 %. La croissance de l'espérance de l'erreur de suivi est justifiée par le fait qu'une augmentation de volatilité implique des mouvements moyens plus importants de la valeur du titre sous-jacent. Par conséquent, les variations de la valeur de l'option par rapport au portefeuille réplique sont supérieures. Étant donné les révisions discrétisées du portefeuille réplique, ce dernier suit moins bien la trajectoire de la valeur de l'option lorsque les chocs sont majeurs. En effet, les variations de la portion delta à détenir sont plus importantes. De même, le risque associé à la réplique est rehaussé en raison des aptitudes inférieures du portefeuille réplique à suivre la valeur de l'option précisément. On voit donc, tel qu'illustré au graphique 5, que l'écart type de l'erreur de suivi augmente avec l'augmentation de la volatilité conjointe. Ainsi, la distribution de l'erreur de suivi présente des valeurs plus éloignées et extrêmes à mesure que la volatilité augmente, engendrant plus d'incertitude.

En ce qui concerne les frais de transaction, ceux-ci restent assez stables même lorsque la volatilité conjointe augmente significativement; on observe moins de 0,7 % de variation entre les volatilités conjointes allant de 4,25 % à 8,25 %. Cette petite diminution est essentiellement due aux frais de transaction initiaux. Pour les cas étudiés, plus la volatilité conjointe est importante, plus le delta initial de l'option à répliquer est petit. Ceci engendre moins de frais de transaction lors de la confection initiale du portefeuille réplique.

## *3.3 Impact d'une modification de la volatilité du titre sous-jacent*

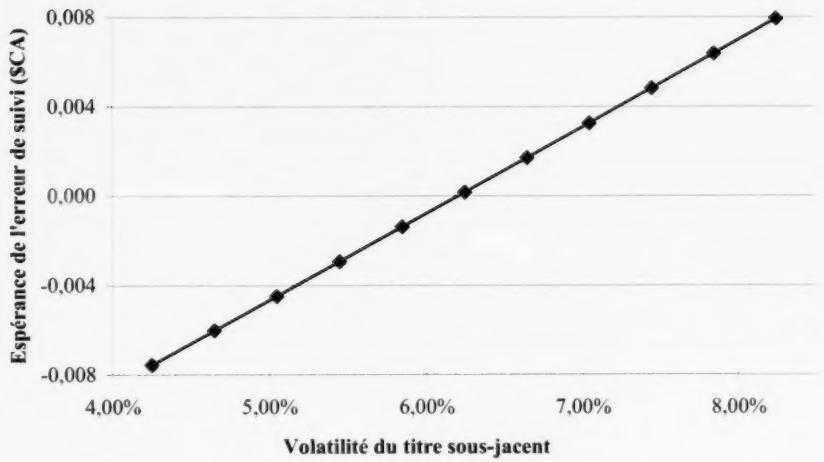
Dans cette section, nous présentons les résultats de l'analyse de l'impact d'une modification de la volatilité du titre sous-jacent sur la réplique de l'option. Les frais de transaction lors de l'achat initial du portefeuille réplique sont de 0,000441 $CA. Contrairement à l'analyse de la section précédente, la volatilité implicite du portefeuille réplique diffère de celle du titre sous-jacent; elle est maintenue constante à la valeur de référence, soit 6,25 %. Le tableau 4 présente les résultats des simulations Monte Carlo pour une modification de la volatilité de titre sous-jacent de 4,25 % à 8,25 %.

## Tableau 4

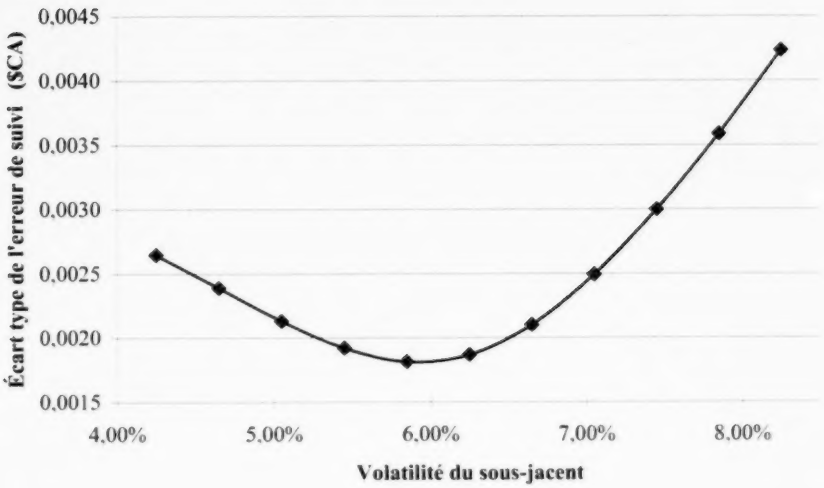
## Impact de la modification de la volatilité du titre sous-jacent

| Volatilité du titre sous-jacent | 4,25 % | 4,65 % | 5,05 % | 5,45 % | 5,85 % | 6,25 % | 6,65 % | 7,05 % | 7,45 % | 7,85 % | 8,25 % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Espérance de l'erreur de suivi ($CA) | -0,007562 | -0,006029 | -0,004491 | -0,002949 | -0,001403 | 0,000145 | 0,001696 | 0,003248 | 0,004802 | 0,006357 | 0,007913 |
| Incertitude sur l'espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000011 | 0,000010 | 0,000009 | 0,000008 | 0,000007 | 0,000008 | 0,000009 | 0,000010 | 0,000012 | 0,000015 | 0,000017 |
| Écart type e de l'erreur de suivi ($CA) | 0,002646 | 0,002387 | 0,002131 | 0,001920 | 0,001813 | 0,001866 | 0,002101 | 0,002491 | 0,002997 | 0,003585 | 0,004234 |
| Incertitude de l'écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000005 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000007 | 0,000008 | 0,000010 | 0,000011 | 0,000013 |
| Espérance des frais de transaction ($CA) | 0,002709 | 0,002804 | 0,002892 | 0,002975 | 0,003053 | 0,003126 | 0,003195 | 0,003260 | 0,003321 | 0,003379 | 0,003434 |
| Incertitude de l'espérance des frais de transaction ($CA) | 0,000002 | 0,000002 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000004 | 0,000004 | 0,000004 | 0,000004 | 0,000004 |

**Graphique 6**
**Espérance de l'erreur de suivi en fonction de la volatilité du titre sous-jacent**




**Graphique 7**
**Écart type de l'erreur de suivi en fonction de la volatilité du titre sous-jacent**



La modification de la volatilité du titre sous-jacent implique une variation de l'ampleur des mouvements de celui-ci. L'espérance de l'erreur de suivi, illustrée au graphique 6, est croissante avec la volatilité. Dans le cas d'une volatilité de réplique supérieure à la volatilité du titre sous-jacent, l'arbitragiste qui vend et réplique l'option selon la volatilité de réplique obtient des profits; la valeur du portefeuille réplique sera, en moyenne, supérieure à celle du flux monétaire de l'option. À l'inverse, si la volatilité de réplique est sous-estimée par rapport à la volatilité réelle du marché, le détenteur du portefeuille réplique encaissera, en moyenne, des profits négatifs croissants (c'est-à-dire de plus en plus négatifs) avec l'écart existant entre les deux volatilités.

Analysons maintenant l'écart type de la distribution de l'erreur de suivi. L'objectif d'un investisseur qui réplique une option est d'obtenir l'incertitude la plus faible possible associée à la réplique. Ainsi, il est avantageux pour l'investisseur de choisir des paramètres de réplique qui lui permettront de minimiser ce risque.

Les écarts types du flux monétaire et du portefeuille réplique sont croissants avec la volatilité du titre sous-jacent. Lorsque la volatilité du titre sous-jacent est inférieure à la volatilité utilisée pour la réplique, la variance du flux monétaire est supérieure à celle du portefeuille réplique. De même, lorsque la volatilité du titre sous-jacent est supérieure à la volatilité de réplique, la variance du portefeuille réplique est supérieure à celle du flux monétaire. Étant donné la corrélation très forte des deux variables aléatoires (très rapprochée de 1), il existe un point qui minimise l'incertitude de la réplique.

Les données sur l'erreur de suivi nous permettent de constater que l'incertitude est significativement minimale pour une volatilité de titre sous-jacent égale à 5,85 % selon les résultats des simulations. Autour de cette valeur, l'incertitude augmente de façon non linéaire pour des valeurs de volatilité de titre sous-jacent inférieures ou supérieures. L'écart type de l'erreur de suivi en fonction de la volatilité du titre sous-jacent, présenté au graphique 7, illustre ce comportement. Ce résultat important indique qu'il est préférable pour un investisseur qui réplique l'option étudiée de choisir une volatilité de portefeuille réplique légèrement supérieure (6,25 % par rapport à 5,85 %) à la volatilité réelle du titre sous-jacent. En effet, une légère surévaluation de la volatilité de marché dans la formation du portefeuille réplique lui permettra de minimiser le risque associé à la réplique. De plus, un tel positionnement implique une valeur espérée de l'erreur de suivi inférieure et négative par rapport à un choix de volatilité de portefeuille identique à la volatilité de marché. Cette situation se traduit par des gains espérés pour un investisseur qui réplique l'option. Dans le même ordre d'idée, un tel choix implique des frais de transaction espérés inférieurs et un investissement initial inférieur. Rappelons que cet investissement correspond à la valeur de l'option évaluée lorsqu'elle est émise.

En ce qui concerne les frais de transaction, ceux-ci croissent significativement avec le niveau de volatilité du titre sous-jacent, passant de 0,0027091 $CA pour une volatilité de titre sous-jacent de 4,25 % à 0,003434 $CA pour une volatilité de 8,25 %. En lien avec l'évolution de la dispersion de la valeur du portefeuille réplique, les frais de transaction sont directement influencés par les modifications de l'évaluation du delta de l'option. La dispersion des valeurs du delta de l'option étant croissante avec la volatilité du titre sous-jacent, les frais de transaction impliqués à chaque révision sont eux aussi croissants étant donné les écarts plus importants entre les deltas. De même, contrairement à la section précédente, la valeur delta initiale utilisée pour créer le portefeuille réplique est constante. Comme nous avons vu à la sous-section précédente, l'élément qui contribuait à diminuer légèrement les frais de transaction à mesure que la volatilité augmente n'est pas présent ici, étant donné la volatilité constante utilisée pour l'évaluation de Vorst. La croissance de la dispersion des valeurs delta est donc reflétée par la croissance des frais de transaction.

## *3.4 Impact d'une modification du prix d'exercice de l'option*

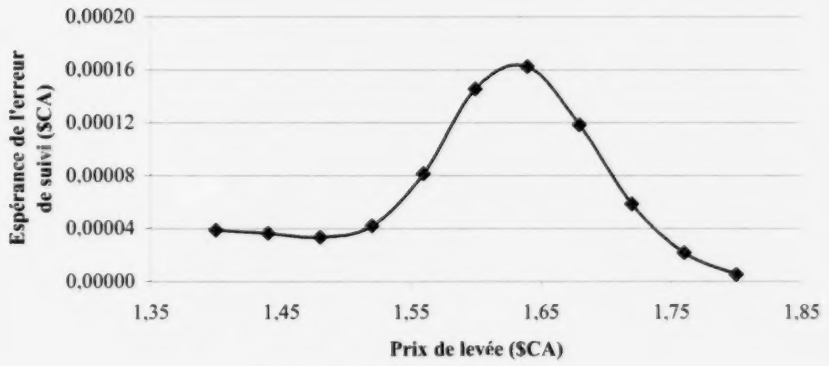
Le tableau 5 présente les résultats des simulations pour une évolution du prix d'exercice de 1,40 $CA (option dans le cours) à 1,80 $CA (option hors du cours).

## Tableau 5

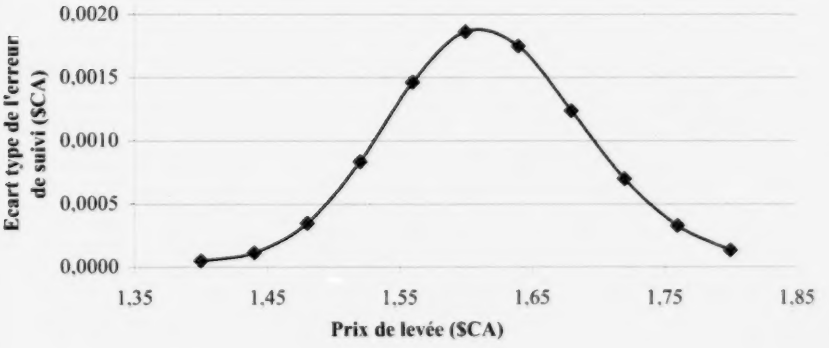
## Impact de la modification du prix d'exercice de l'option sur sa réplique

| Prix de levée ($CA) | 1,40 | 1,44 | 1,48 | 1,52 | 1,56 | 1,60 | 1,64 | 1,68 | 1,72 | 1,76 | 1,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur initiale de l'option (Vorst) ($CA) | 0,202940 | 0,164053 | 0,125392 | 0,087916 | 0,054210 | 0,028051 | 0,011691 | 0,003814 | 0,000959 | 0,000185 | 0,000027 |
| Delta initial de l'option (Vorst) | 0,977973 | 0,976463 | 0,964974 | 0,914201 | 0,778504 | 0,551289 | 0,305113 | 0,127397 | 0,039596 | 0,009162 | 0,001590 |
| Espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000039 | 0,000036 | 0,000033 | 0,000042 | 0,000081 | 0,000145 | 0,000162 | 0,000118 | 0,000058 | 0,000021 | 0,000005 |
| Incertitude de l'espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000003 | 0,000006 | 0,000008 | 0,000007 | 0,000005 | 0,000003 | 0,000001 | 0,000001 |
| Écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000052 | 0,000115 | 0,000348 | 0,000836 | 0,001463 | 0,001866 | 0,001751 | 0,001240 | 0,000702 | 0,000330 | 0,000132 |
| Incertitude de l'écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000001 | 0,000003 | 0,000004 | 0,000005 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000005 |
| Espérance des frais de transaction ($CA) | 0,001583 | 0,001605 | 0,001740 | 0,002164 | 0,002824 | 0,003126 | 0,002561 | 0,001486 | 0,000613 | 0,000183 | 0,000040 |
| Frais de transaction initiaux ( $CA) | 0,000782 | 0,000781 | 0,000772 | 0,000731 | 0,000623 | 0,000441 | 0,000244 | 0,000102 | 0,000032 | 0,000007 | 0,000001 |
| Incertitude de l'espérance des frais de transaction ($CA) | < 0,0000001 | < 0,0000001 | 0,000001 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000004 | 0,000005 | 0,000003 | 0,000002 | 0,000001 |

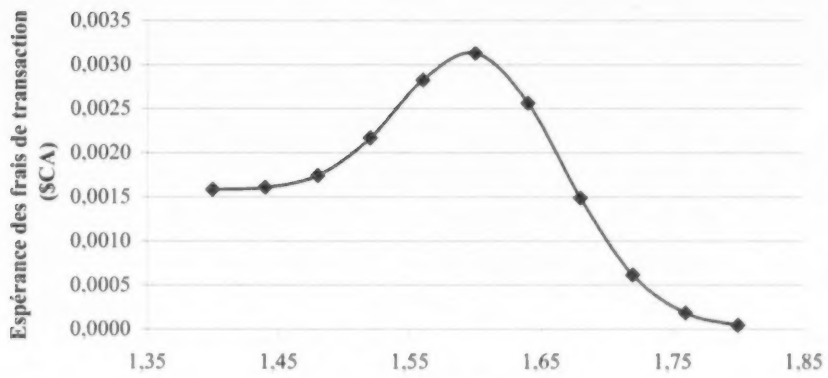
**Graphique 8**
**Espérance de l'erreur de suivi en fonction du prix de levée de l'option**




**Graphique 9**
**Écart type de l'erreur de suivi en fonction du prix de levée de l'option**



**Graphique 10**
**Espérance des frais de transaction en fonction du prix de levée de l'option**




La valeur espérée de l'erreur de suivi, illustrée au graphique 8, est minimale lorsque l'option est profondément dans le cours ou profondément hors du cours. De plus, cette valeur est maximale lorsque l'option approche le niveau au cours. Intuitivement, les mouvements de la valeur du titre sous-jacent ont beaucoup moins d'impacts sur la valeur de delta pour une option éloignée du niveau au cours. En effet, les valeurs initiales de delta, pour les différents points simulés, présentent les écarts maximaux d'un point à l'autre pour une option près du niveau au cours. Dans ce cas, les mouvements de la portion delta du portefeuille réplique, d'une révision à l'autre, sont plus importants. Ainsi, ce portefeuille suit moins bien la valeur exacte de l'option asiatique, impliquant une erreur de suivi moyenne plus importante.

Le niveau de risque associé à la réplique de l'option, l'écart type de l'erreur de suivi, est lui aussi significativement maximal pour une option rapprochée du niveau au cours. Le graphique 9 représente ce comportement. Suivant l'explication du paragraphe précédent, les valeurs delta d'une option au cours sont plus sensibles et présentent des mouvements plus importants, pour des variations de la valeur du titre sous-jacent équivalentes, que les valeurs delta d'une option éloignée du niveau au cours. Le portefeuille réplique d'une option au cours suit moins bien l'évolution de la valeur exacte de l'option, le risque étant associé à la réplique est donc lui aussi supérieur.

Finalement, les frais de transaction associés à la réplique, présentés au graphique 10, sont eux aussi significativement maximaux lorsque l'option est au cours étant donné les mouvements de la valeur de delta plus importants. Par contre, il faut noter qu'une option profondément hors du cours implique des frais pratiquement nuls alors qu'une option profondément dans le cours implique des frais légèrement plus élevés. En effet, alors que

la valeur delta d'une option profondément hors du cours implique la détention d'une portion très petite de titre sous-jacent, la réplique d'une option profondément dans le cours implique l'achat d'une portion élevée du titre sous-jacent au départ. Les frais de transaction impliqués par cet achat expliquent la différence entre le niveau des frais de transaction des options profondément dans le cours par rapport aux options profondément hors du cours.

## *3.5 Impact de l'introduction d'un paramètre de déviation de la dérive*

Le modèle d'évaluation des options européennes de Black et Scholes implique une propriété fondamentale : le processus d'évaluation ne considère que le terme de volatilité du titre sous-jacent, sans égard au paramètre de dérive. Ainsi, l'évaluation selon Black et Scholes de la valeur d'une option sera identique pour deux titres sous-jacents possédant des caractéristiques semblables mais ayant des paramètres de dérive différents. L'évaluation en temps continu implique que la volatilité d'un titre sous-jacent est suffisante pour déterminer le prix d'arbitrage d'un titre contingent. Or, l'hypothèse de négociation en temps continu a été levée pour des raisons mentionnées précédemment. Cette section étudie les effets de l'introduction d'un paramètre de dérive dans l'équation de diffusion du titre sous-jacent en contexte discontinu. En reprenant l'équation 1 de diffusion et en ajoutant le terme de dérive, l'équation utilisée lors des simulations devient :

$$S(t_i) = S(t_{i-1})e^{((r-r_f+derive)-\frac{1}{2}\sigma^2)*(t_i-t_{i-1})+\sigma\sqrt{t_i-t_{i-1}}\varepsilon_i}$$

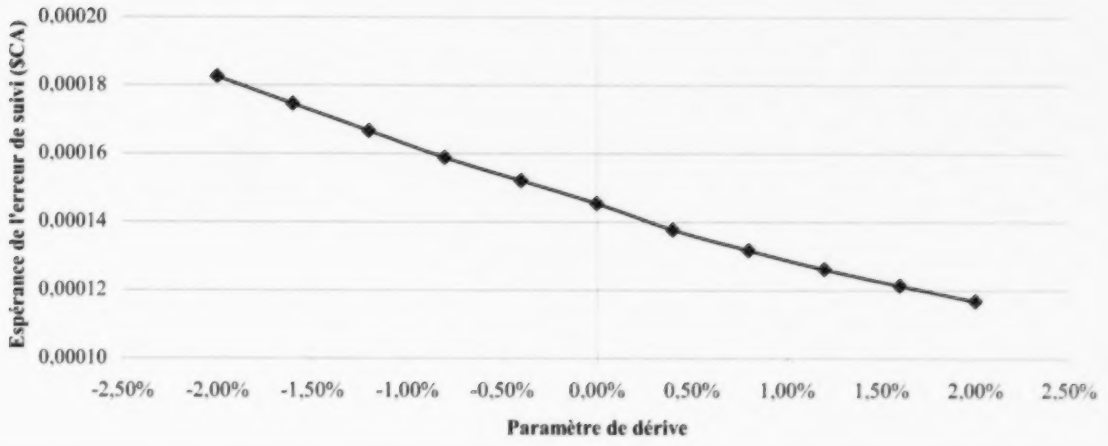
Les simulations sont effectuées pour des valeurs du paramètre de dérive variant de -2 % à 2 % et les résultats sont présentés au tableau 6.

**Tableau 6**

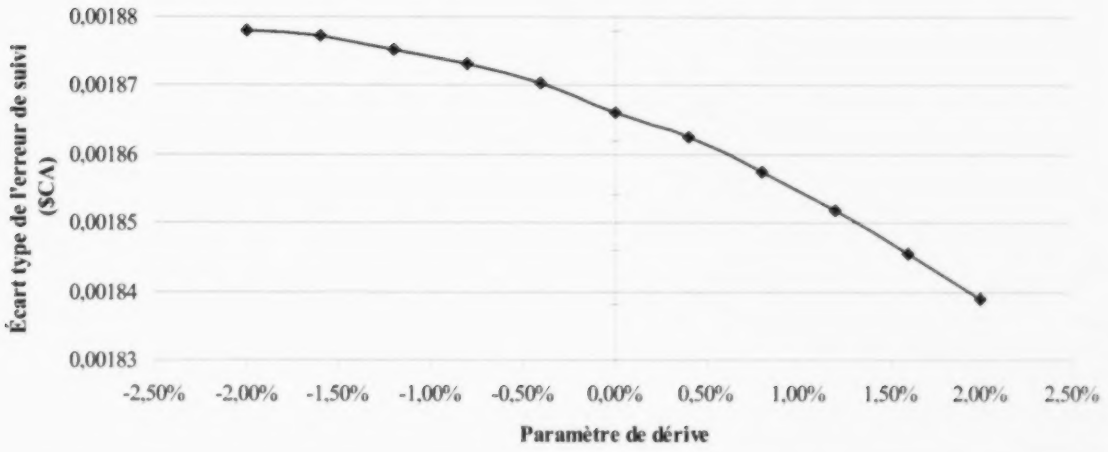
**Impact de l'introduction d'un paramètre de déviation de la dérive**

| Dérive | -2,00 % | -1,60 % | -1,20 % | -0,80 % | -0,40 % | 0,00 % | 0,40 % | 0,80 % | 1,20 % | 1,60 % | 2,00 % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000182 | 0,000175 | 0,000167 | 0,000159 | 0,000152 | 0,000145 | 0,000137627 | 0,000132 | 0,000126 | 0,000121 | 0,000117 |
| Incertitude de l'espérance de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 | 7,60378E-06 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 | 0,000008 |
| Écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,001878 | 0,001877 | 0,001875 | 0,001873 | 0,001870 | 0,001866 | 0,001862539 | 0,001857 | 0,001852 | 0,001845 | 0,001839 |
| Incertitude de l'écart type de l'erreur de suivi ($CA) | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 6,13603E-06 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 | 0,000006 |
| Espérance des frais de transaction ($CA) | 0,003081 | 0,003093 | 0,003103 | 0,003112 | 0,003120 | 0,003126 | 0,003136498 | 0,003133 | 0,003134 | 0,003134 | 0,003131 |
| Incertitude de l'espérance des frais transaction ($CA) | 0,000004 | 0,000004 | 0,000004 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 3,42784E-06 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 | 0,000003 |

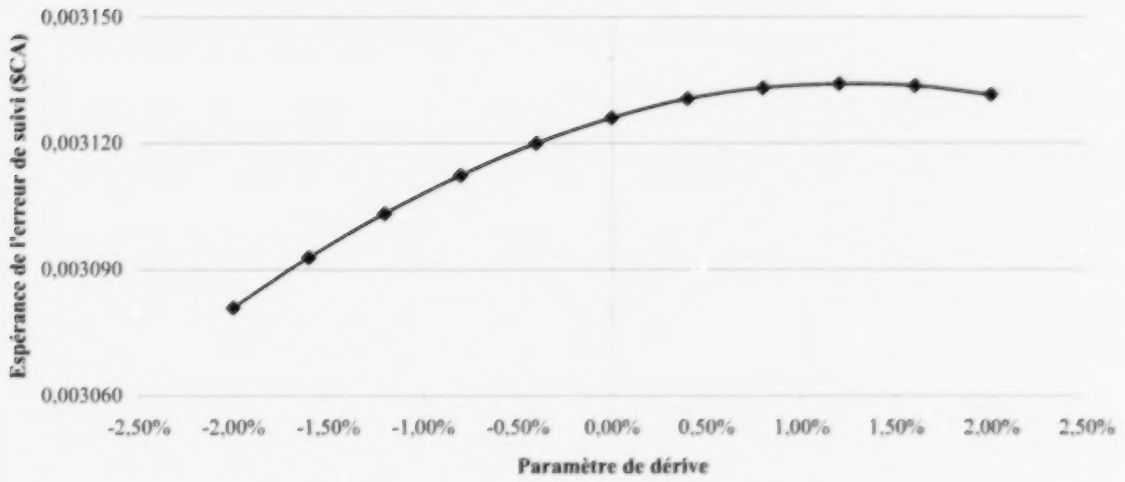
**Graphique 11**
**Espérance de l'erreur de suivi en fonction du paramètre de dérive**




**Graphique 12**
**Écart type de l'erreur de suivi en fonction du paramètre de dérive**



**Graphique 13**
**Espérance des frais de transaction en fonction du paramètre de dérive**




Les frais de transaction lors de l'achat initial du portefeuille réplique sont de 0,000441 $CA. L'écart type de la simulation augmente significativement avec l'augmentation de la dérive, passant de 0,033474 $CA pour une dérive de -2 % à 0,045774 pour une dérive de 2 %. Intuitivement, étant donné que les paramètres de base étudiés présentent une option au cours, une dérive de plus en plus négative implique, en moyenne, un nombre de plus en plus important de sentiers de flux monétaires négatifs. Or, ces sentiers sont tronqués à zéro. Ainsi, plus il y a de sentiers de flux monétaires négatifs, plus la dispersion de la valeur espérée du flux monétaire de l'option diminue.

En ce qui concerne l'espérance de l'erreur de suivi de la réplique, celle-ci diminue à mesure que le paramètre de dérive croît, passant de 0,000182 $CA pour une dérive de -2 % à 0,000117 $CA pour une dérive de 2 %. Ce comportement est présenté au graphique 11. L'erreur de suivi espérée diminue. En effet, la corrélation entre le portefeuille réplique et le flux monétaire croît avec la dérive.

L'incertitude reliée à l'erreur de la réplique, illustrée au graphique 12, diminue elle aussi au fur et à mesure que la dérive croît, passant de 0,001878 $CA pour une dérive de -2 % à 0,001839 $CA pour une dérive de 2 %. Encore une fois, ces différences ne sont pas importantes d'une variation à l'autre. La différence devient notable pour une variation de 3,2 % de la dérive. La variance du flux monétaire de l'option, de même que la variance de la valeur du portefeuille réplique augmentent avec le paramètre de dérive.

Les frais de transaction sont croissants avec la dérive. Cette croissance n'est cependant pas notable d'un point évalué à l'autre; elle le devient pour une variation de 0,8 % de la dérive. Les frais de transaction dépendent, comme nous l'avons mentionné précédemment, des variations de la valeur delta estimée par Vorst et de la valeur du titre sous-jacent. D'une part, plus le paramètre de dérive croît, plus la valeur du titre sous-jacent est, en moyenne, élevée, ce qui implique une hausse des frais lors de chaque révision. D'autre part, à mesure que la dérive croît en valeur absolue, la dispersion de la valeur du titre sous-jacent augmente. Cette croissance de dispersion implique que les mouvements de la valeur du delta entre chaque révision sont plus importants lorsque la dérive est de plus en plus négative (pour une dérive négative) ou de plus en plus positive (pour une dérive positive).

## *3.6 Synthèse des résultats*

Le tableau 7 synthétise les résultats obtenus dans les sections 3.1 à 3.5.

**Tableau 7**

**Synthèse de l'impact de l'augmentation des paramètres sur la réplique de l'option**

| Paramètre / Impact | Espérance de l'erreur de suivi | Volatilité de l'erreur de suivi | Espérance des frais de transaction |
|---|---|---|---|
| **Nombre de révisions** | Stable | Diminution | Augmentation |
| **Volatilité conjointe** | Augmentation | Augmentation | Faible diminution |
| **Volatilité du titre sous-jacent** | Augmentation | Fonction convexe | Augmentation |
| **Prix d'exercice de l'option** | Fonction avec maximum | Fonction avec maximum | Fonction avec maximum |
| **Dérive du titre sous-jacent** | Diminution | Diminution | Augmentation |

# CONCLUSION

L'analyse de la réplique d'une option d'achat asiatique sur devise a été effectuée dans le cadre d'un processus de simulation Monte Carlo. Nous avons analysé l'impact de la modification de cinq paramètres caractérisant l'option ou la dynamique du titre sous-jacent à l'option sur la réplique de celle-ci. Ceci conduit à l'analyse d'une relation risque-rendement issue de la réplique de l'option. Ainsi, selon les intérêts de l'intervenant du marché financier désirant répliquer l'option, il est possible d'identifier un positionnement optimal.

L'espérance de l'erreur de suivi est constante selon la fréquence de révision. Par contre, un investisseur choisira une fréquence de révision plus élevée dans le but de diminuer l'incertitude associée à l'erreur de suivi. Celle-ci diminue significativement à mesure que la fréquence de révision du portefeuille réplique augmente. Parallèlement, ce choix de positionnement implique des frais de transaction plus élevés. L'investisseur doit donc identifier un compromis entre l'incertitude associée à la réplique et les frais de transaction impliqués.

La variation du niveau de volatilité conjointe du portefeuille réplique et du titre sous-jacent (volatilité du titre sous-jacent équivalente à la volatilité du portefeuille réplique) est le deuxième paramètre considéré. L'espérance de l'erreur de suivi, de même que l'incertitude associée, augmentent aussi à mesure que la volatilité croît. L'investisseur qui réplique l'option possède donc une position plus risquée et plus coûteuse (erreur de suivi supérieure) lorsque la volatilité est élevée. Par contre, étant donné que les frais de transaction diminuent légèrement lorsque la volatilité augmente, l'investisseur pourra assumer des frais de transaction inférieurs si la volatilité est élevée.

Une modification de la volatilité du titre sous-jacent, tout en maintenant celle du portefeuille réplique constante, constitue le troisième point d'analyse. L'erreur de suivi espérée croît elle aussi à mesure que la volatilité du titre sous-jacent augmente. Par contre, l'incertitude associée à la réplique est minimale pour une volatilité de titre sous-jacent légèrement inférieure à la volatilité de réplique. Ainsi, l'investisseur désirant minimiser le risque associé à la réplique choisira donc une volatilité de réplique légèrement supérieure à la volatilité du titre sous-jacent (la volatilité du marché). Dans ce cas, un tel positionnement impliquera une erreur de suivi espérée légèrement négative. Ainsi, la valeur du portefeuille réplique selon ce choix sera, en général, supérieure à la valeur du flux monétaire final de l'option. De plus, comme les frais de transaction associés à la réplique sont significativement croissants à mesure que la volatilité du titre sous-jacent augmente, la décision de surévaluer légèrement la volatilité de marché impliquera une diminution des frais de transaction.

Une variation du prix d'exercice de l'option répliquée constitue le quatrième point considéré dans l'analyse. L'erreur de suivi espérée, pour sa part, est maximale lorsque l'option est au cours. Elle diminue à mesure que l'option devient profondément dans le cours ou profondément hors du cours. L'incertitude associée à l'erreur de suivi a un comportement similaire et est maximale lorsque l'option est au cours. Les frais de transaction diminuent aussi significativement à mesure que l'option s'éloigne du niveau au cours. Cependant, ceux-ci sont minimaux lorsque l'option est profondément hors du cours; une option profondément dans le cours implique l'achat d'une portion importante de titres sous-jacents et donc des frais de transaction supérieurs. L'investisseur désirant minimiser l'erreur de suivi, les risques associés à la réplique et les frais de transaction choisira donc une option qui n'est pas au cours et préférablement hors du cours. Cependant, il est évident que la raison première qui motive l'exercice de la réplique demeure la couverture des dépenses issues des variations de taux de change. Le choix du niveau au cours doit donc respecter les objectifs de couverture avant tout. Par contre, dans la mesure du possible, un positionnement efficace implique des coûts de réplique et une incertitude qui sont inférieurs.

L'introduction d'un paramètre de déviation de la dérive dans l'équation de diffusion du titre sous-jacent constitue le dernier point analysé. L'erreur de suivi espérée, de même que le risque qui y est associé, diminuent à mesure que la dérive augmente. Il est donc très intéressant pour un investisseur de répliquer une option dont le titre sous-jacent est caractérisé par une déviation positive de la dérive. Une telle situation fait en sorte que la réplique est moins risquée et la valeur finale du portefeuille réplique est plus rapprochée du flux monétaire final de l'option. Finalement, il est à noter que les frais de transaction augmentent à mesure que la dérive augmente.

Évidemment, la structure de base considérée dans cette étude se concentre principalement sur l'analyse de l'impact de la négociation en temps discret sur la réplique d'une option asiatique. La littérature développée dans le but de minimiser les frais de transaction associés à la réplique constitue une avenue très intéressante dans l'optique d'une poursuite plus approfondie de l'étude. Il serait extrêmement intéressant d'introduire les stratégies de révision alternatives dans le but d'identifier l'apport réel de celles-ci sur la procédure d'optimisation des coûts de la réplique d'une option asiatique. Ainsi, la modélisation de la super réplique, des révisions basées sur le mouvement du titre sous-jacent, des révisions basées sur le mouvement du delta de l'option et les révisions multipériodiques constitueraient des développements intéressants. Notre analyse est fondée sur l'utilisation d'une volatilité constante durant la durée de vie de l'option. Cette hypothèse pourrait être abandonnée dans le but d'introduire des modèles de volatilité qui évoluent à travers le temps. Ainsi, une modélisation stochastique de la volatilité pourrait constituer une autre voie intéressante à explorer.

# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bertsimas, D., Kogan, L. et Lo, A.W., "When is time continuous?", *Journal of Financial Economics*, 55 (2000), 173-204.

Black, F. et Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economics*, 81 (1973), 637-659.

Boyle, P.P. et Emmanuel, D., "Discretely adjusted option hedges" *Journal of Financial Economics*, 8 (1980), 259-282.

Cox, J.C. et Ross, S.A. "The Valuations of Options for Alternative Stochastic Process", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 145-166.

Cox, J.C. et Ross, S.A., "The Pricing of Options for Jump Processes", Document de travail 2-75, Rodney L. White Center for Financial research, University of Pennsylvania, (1975).

Dupire, B. édit., "Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management", Fisk Books, (1998).

Engle, R.F. et Rosenberg, J.V., "Hedging options in a GARCH environnement : Testing the Term Structure of Stochastic Volatility Models", UCSD discussion paper, (1994)

Engle, R.F. et Rosenberg, J.V., "Garch gamma", NBER working paper series, n°5128 (1995).

Galai, D., "The components of the return from hedging options against stocks", *Journal of Business*, 56 (1983), 45-54.

Garman, M. et Kohlhagen S., "Foreign Currency Option Values", *Journal of Finance*, 33 (1983), 231-238.

Gobet, E. et Temam, E., "Discrete time hedging errors for options with irregular payoffs", *Finance and Stochastics*, (2001), 357-367.

Jarrow, R. et Rudd, A., "Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes", *Journal of Financial Economics*, 10 (1992), 347-369.

Kabanov, Y.M. et Safarian, M.M., "On Leland's strategy of option pricing with transactions costs", *Finance and Stochastics*, (1997), 239-250.

Leland, H.E., "Option pricing and replication with transactions costs", *Journal of Finance*, (1985), 1283-1301.

Levy, E., "Asian arithmetic", *Risk*, 3 (1990), 113-129.

Mandelbrot, B., "The variation of certain speculative prices", *Journal of Business*, 36 (1963a), 394-419

Mandelbrot, B., "New methods in statistical economics", *Journal of Political Economy*, 71, (1963b), 421-440.

Mandelbrot, B., "The variation of some other speculative prices", *Journal of Business*, 40 (1967), 393-413.

Merton, R.C., "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1973), 141-183.

Merton, R.C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 125-144.

Robinson, D.H. et Yang, M.C.K., "Understanding and Learning Statistics by Computer", World Scientific (1986), Singapore.

Turnbull, S.M. et Wakeman, L.M., "A quick algorithm for pricing European average options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (1991), 377-389.

Vorst, T., "Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options", *International Review of Financial Analysis*, 1, (1992), No.3, 179-193.

COLLECTION FEUILLE D'ARGENT

Le modèle d'évaluation des options proposé par Black et Scholes conduit à une réplique parfaite du flux monétaire d'une option européenne. Ce modèle nécessite une révision continue du portefeuille réplique. Cette hypothèse est toutefois irréaliste dans un contexte de marché financier réel; la discrétisation des révisions du portefeuille réplique implique une reproduction imparfaite, et donc risquée, du flux monétaire de l'option. La différence de valeur à l'échéance entre l'option et le portefeuille réplique, soit l'erreur de suivi, est utilisée comme mesure de performance pour évaluer la réplique de cette option. Plusieurs études antérieures se sont attaquées à l'analyse de la réplique d'une option européenne; par contre, aucune analyse de la réplique d'une option asiatique n'avait été effectuée à notre connaissance. Une telle étude est justifiée par l'utilité et l'intérêt croissants pour ce type d'option exotique dans le marché financier, d'où l'importance de connaître les risques de la réplique de cette option.

Dans cette étude, nous analysons l'erreur de suivi de la réplique en temps discret d'une option asiatique en modifiant cinq paramètres caractérisant l'option ou la dynamique du titre sous-jacent à l'option. Ces paramètres sont : la fréquence de révision du portefeuille réplique, la volatilité conjointe du portefeuille réplique et du titre sous-jacent, la volatilité du titre sous-jacent en maintenant celle du portefeuille réplique constante, le prix d'exercice de l'option et la dérive du processus de diffusion du titre sous-jacent. Plusieurs résultats sont obtenus, notamment les effets asymétriques de l'évaluation de la volatilité future du titre sous-jacent et l'impact de la dérive du titre sous-jacent.

Finances Québec

ISBN 2-550-43582-6